

Docente: Vincenzo Pappalardo
Materia: Matematica

Algebra

Equazioni e Disequazioni
valore assoluto

Il *valore assoluto* di un numero è uguale al numero stesso se il numero è positivo o nullo, è l'opposto del numero se questo è negativo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

esempio $|+7| = 7$ $|-7| = 7$ $|0| = 0$

In generale, se $f(x)$ rappresenta una funzione, il suo *valore assoluto* è definito come:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Equazioni valore assoluto

Risolvere la seguente equazione in valore assoluto:

$$|x - 5| = 3x - 1$$

Applichiamo la definizione:

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x - 5 \geq 0 \\ -(x - 5) & \text{se } x - 5 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 5 & \text{se } x \geq 5 \\ -x + 5 & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione dell'equazione è data dall'unione delle soluzioni delle seguenti equazioni:

$$x - 5 = 3x - 1 \quad \text{quando } x \geq 5$$

$$-x + 5 = 3x - 1 \quad \text{quando } x < 5$$

Soluzione prima equazione:

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x - 5 = 3x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Soluzione non è accettabile in quanto non soddisfa la condizione $x \geq 5$.

Soluzione seconda equazione :

$$\begin{cases} x < 5 \\ -x + 5 = 3x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Soluzione accettabile in quanto soddisfa la condizione $x \geq 5$.

In definitiva:

$$\text{soluzione} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Risolvere la seguente equazione in valore assoluto:

$$|x^2 - x| = 6$$

Applichiamo la definizione:

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x^2 - x \geq 0 \\ -(x^2 - x) & \text{se } x^2 - x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ -(x^2 - x) & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione è data dall'unione delle soluzioni delle seguenti equazioni:

$$x^2 - x = 6 \quad \text{quando } x \leq 0 \vee x \geq 1$$

$$-x^2 + x = 6 \quad \text{quando } 0 < x < 1$$

Soluzione prima equazione:

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x^2 - x = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x_1 = -2 \quad x_2 = 3 \end{cases}$$

Soluzione accettabile in quanto
soddisfa la condizione $x \leq 0 \vee x \geq 1$

Soluzione seconda equazione:

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ -x^2 + x = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ \nexists x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

Non ammette soluzione

In definitiva:

$$\text{soluzione} \rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 3$$

Equazione con due valori assoluto

$$|A(x)| = |B(x)|$$

Soluzione

$$|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = B(x) \cup A(x) = -B(x)$$

esempio

$$|x^2 - 1| = |x + 1| \Leftrightarrow (x^2 - 1 = x + 1) \cup (x^2 - 1 = -x - 1)$$

Risolviamo la prima equazione: $x^2 - 1 = x + 1 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 2$

Risolviamo la seconda equazione: $x^2 - 1 = -x - 1 \rightarrow x_3 = 0 \quad x_4 = -1$

Soluzione equazione data

Unione delle soluzioni delle singole equazioni

$$S = \{-1; 0; 2\}$$

Risolvere la seguente equazione con più valori assoluto:

$$|x| + |x + 1| - |x + 2| = x$$

Procedura risolutiva:

1. Studiare i segni degli argomenti di ciascun valore assoluto.
2. Costruire lo schema dei segni grazie al quale potremo distinguere gli intervalli in cui studiare l'equazione.
3. Determinare l'insieme soluzione parziale per ciascun caso, risolvendo l'equazione in ogni intervallo determinato nel punto 2. Utilizziamo la definizione di valore assoluto così che esso "sparisca".
4. L'insieme soluzione dell'equazione di partenza è dato dall'unione delle soluzioni parziali determinati nel punto 3.

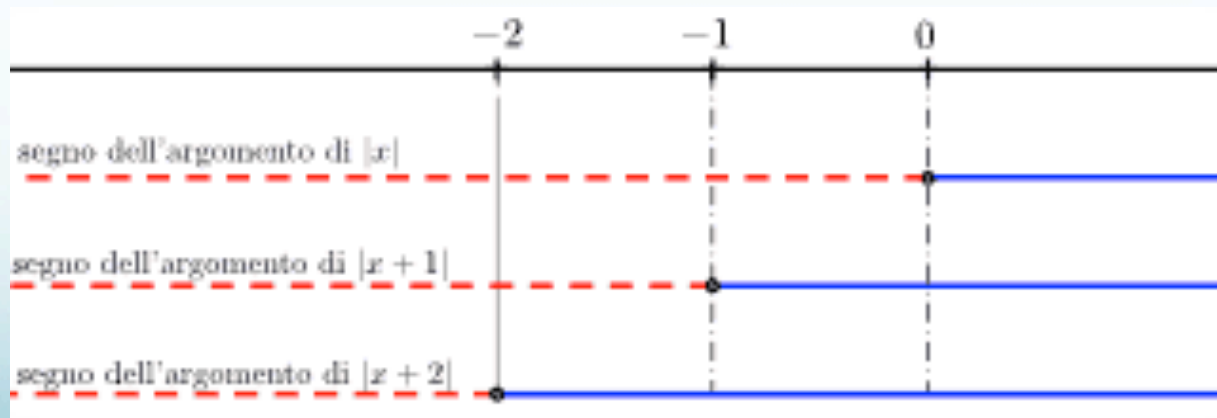
1. Studiare i segni degli argomenti di ciascun valore assoluto.

$$\text{segno argomento di } |x| \rightarrow x \geq 0$$

$$\text{segno argomento di } |x+1| \rightarrow x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$\text{segno argomento di } |x+2| \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$$

2. Costruire lo schema dei segni grazie al quale potremo distinguere gli intervalli in cui studiare l'equazione.



3. Determinare l'insieme soluzione parziale per ciascun caso, risolvendo l'equazione in ogni intervallo determinato nel punto 2. Utilizziamo la definizione di valore assoluto così che esso "sparisca".

$$\left(\begin{array}{l} \text{definizione valore assoluto} \\ \text{nell'intervallo } x \leq -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} |x| = -x \\ |x+1| = -(x+1) \\ |x+2| = -(x+2) \end{array} \right)$$

L'equazione diventa:

$$-x - (x+1) - [-(x+2)] = x \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Soluzione non accettabile in quanto non soddisfa la condizione $x \leq -2$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{definizione valore assoluto} \\ \text{nell'intervallo } -2 \leq x \leq -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} |x| = -x \\ |x+1| = -(x+1) \\ |x+2| = x+2 \end{array} \right)$$

L'equazione diventa: $-x - (x+1) - (x+2) = x \rightarrow x = -\frac{3}{4}$

Soluzione non accettabile in quanto non soddisfa la condizione $-2 \leq x \leq -1$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{definizione valore assoluto} \\ \text{nell'intervallo } -1 \leq x \leq 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} |x| = -x \\ |x+1| = x+1 \\ |x+2| = x+2 \end{array} \right)$$

L'equazione diventa: $-x + (x+1) - (x+2) = x \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Soluzione accettabile in quanto soddisfa la condizione $-2 \leq x \leq -1$

$$\left(\begin{array}{l} \text{definizione valore assoluto} \\ \text{nell'intervallo } x \geq 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} |x| = x \\ |x+1| = x+1 \\ |x+2| = x+2 \end{array} \right)$$

L'equazione diventa:

$$x + (x+1) - (x+2) = x \rightarrow \text{soluzione impossibile}$$

4. L'insieme soluzione dell'equazione di partenza è dato dall'unione delle soluzioni parziali determinati nel punto 3.

L'equazione ha come unica soluzione $x = -1/2$.

Disequazioni valore assoluto

La disequazione con valore assoluto del tipo:

$$|A(x)| < k \quad k > 0$$

è equivalente a:

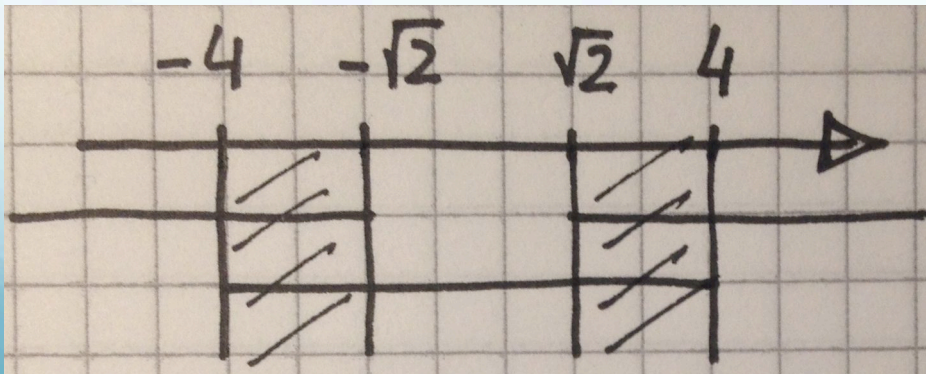
$$-k < A(x) < k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$$

Risolvere la seguente disequazione con valore assoluto:

$$|x^2 - 9| < 7$$

E' equivalente a:

$$-7 < x^2 - 9 < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9 > -7 \\ x^2 - 9 < 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$



soluzione

$$-4 < x < -\sqrt{2} \cup \sqrt{2} < x < 4$$

oppure

$$]-4; \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; 4[$$

Disequazione con valore assoluto (caso particolare):

$$|2x^2 + x| < -4$$

Soluzione: impossibile

Perché: per definizione il valore assoluto non può essere mai negativo.

La disequazione con valore assoluto del tipo:

$$|A(x)| > k \quad k > 0$$

è equivalente a:

$$A(x) < -k \cup A(x) > k$$

Risolvere la seguente disequazione con valore assoluto:

$$|x^2 - x| > 6$$

E' equivalente a: $x^2 - x < -6 \cup x^2 - x > 6$

Prima disequazione:

$$x^2 - x < -6 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

Seconda disequazione:

$$x^2 - x > 6 \rightarrow x < -2 \vee x > 3$$

La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni delle singole disequazioni:

soluzione

$$x < -2 \cup x > 3 \xleftrightarrow{\text{oppure}}]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$$

Risolvere la seguente disequazione fratta con valore assoluto:

$$\left| \frac{2x-5}{x+1} \right| > 1$$

La disequazione data è equivalente all'unione delle seguenti disequazioni:

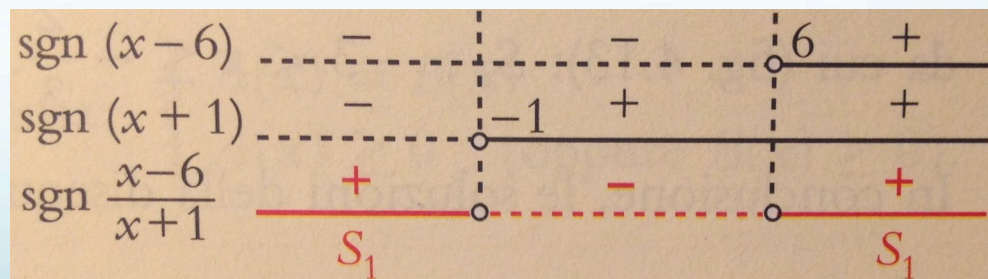
$$\frac{2x-5}{x+1} > 1 \cup \frac{2x-5}{x+1} < -1$$

- Prima disequazione:

$$\frac{2x-5}{x+1} > 1 \rightarrow \frac{x-6}{x+1} > 0$$

$$N > 0 \rightarrow x-6 > 0 \rightarrow x > 6$$

$$D > 0 \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$



soluzione

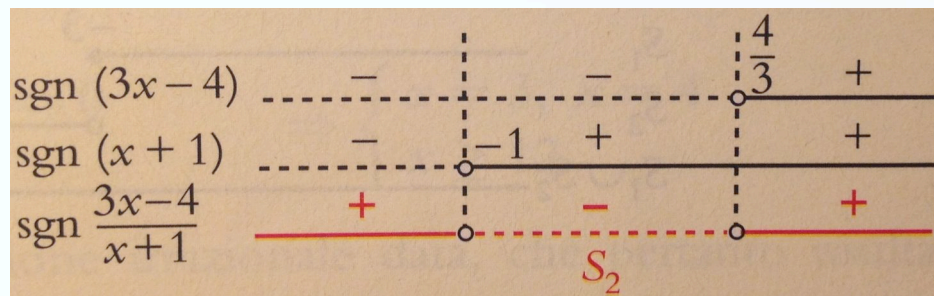
$$x < -1 \vee x > 6 \longleftrightarrow]-\infty; -1[\cup]6; +\infty[$$

- Seconda disequazione:

$$\frac{2x-5}{x+1} < -1 \rightarrow \frac{3x-4}{x+1} < 0$$

$$N > 0 \rightarrow 3x-4 > 0 \rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$D > 0 \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$



soluzione

$$-1 < x < \frac{4}{3} \vee \xrightarrow{\text{oppure}} \left] -1; \frac{4}{3} \right[$$

L'insieme delle soluzioni trovate rappresenta la soluzione della disequazione data:

soluzione

$$S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow x < -1 \vee -1 < x < \frac{4}{3} \vee x > 6 \xrightarrow{\text{oppure}}]-\infty; -1[\cup \left] -1; \frac{4}{3} \right[\cup]6; +\infty[$$

Disequazione con valore assoluto (caso particolare):

$$|2x^2 + x| > -4$$

soluzione

$$\forall x \in \mathfrak{R} \longleftrightarrow_{\text{oppure}}]-\infty; +\infty[$$

Perché: per definizione il valore assoluto è sempre positivo

Risolvere la seguente disequazione con valore assoluto:

$$|x - 4| > -2x + 1$$

Applichiamo la definizione:

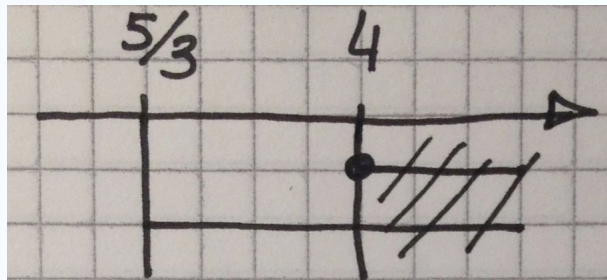
$$|x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x - 4 \geq 0 \\ -(x - 4) & \text{se } x - 4 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4 & \text{se } x \geq 4 \\ -x + 4 & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x - 4 > -2x + 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 4 \\ -x + 4 > -2x + 1 \end{cases}$$

Soluzione primo sistema:

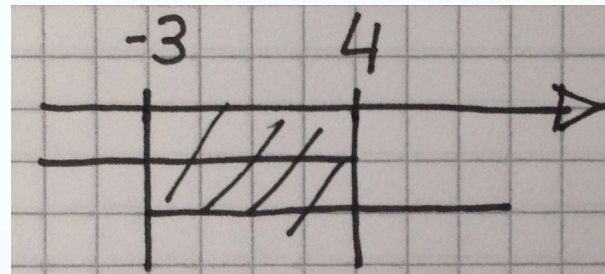
$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases}$$



soluzione $\rightarrow x \geq 4$

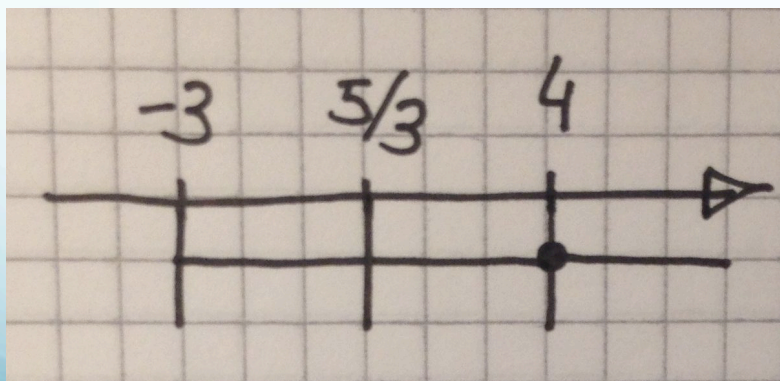
Soluzione secondo sistema:

$$\begin{cases} x < 4 \\ x > -3 \end{cases}$$



soluzione $\rightarrow -3 < x < 4$

In definitiva:



soluzione

$$-3 < x < 4 \cup x \geq 4 \Leftrightarrow x > -3$$

oppure

$$]-3;4[\cup [4;+\infty[=]-3;+\infty[$$

Risolvere la seguente disequazione con valore assoluto:

$$|x^2 - 4| < x^2 + 5x + 10$$

Applichiamo la definizione:

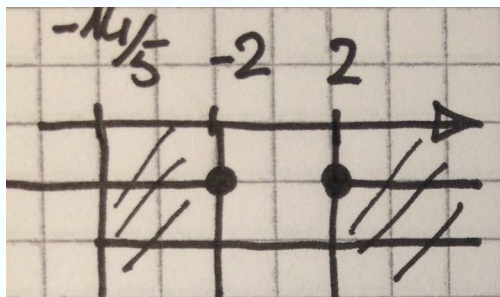
$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4) & \text{se } x^2 - 4 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x^2 - 4 < x^2 + 5x + 10 \end{cases} \cup \begin{cases} -2 < x < 2 \\ -x^2 + 4 < x^2 + 5x + 10 \end{cases}$$

Soluzione primo sistema:

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x > -\frac{14}{5} \end{cases}$$

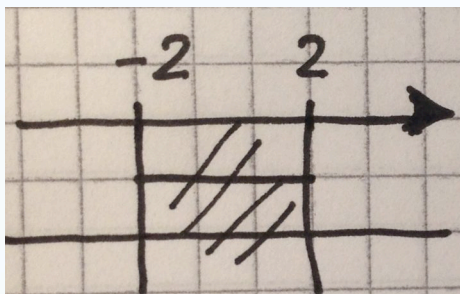


soluzione

$$-\frac{14}{5} < x \leq -2 \vee x \geq 2$$

Soluzione secondo sistema:

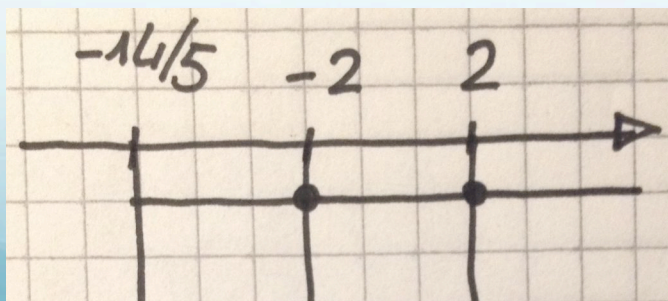
$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



soluzione

$$-2 < x < 2$$

In definitiva:



soluzione

$$x > -\frac{14}{5} \xrightarrow{\text{oppure}} \left] -\frac{14}{5}; +\infty \right[$$

Risolvere la seguente disequazione fratta con valore assoluto:

$$\frac{|x| - x}{2x^2 + 1} \leq -3$$

Riscriviamo la disequazione nel seguente modo:

$$\frac{|x| - x}{2x^2 + 1} + 3 \leq 0 \rightarrow \frac{|x| - x + 6x^2 + 3}{2x^2 + 1} \leq 0$$

Studiamo il segno della disequazione fratta:

$$N \geq 0 \rightarrow |x| - x + 6x^2 + 3 \geq 0$$

$$D > 0 \rightarrow 2x^2 + 1 > 0$$

Con l'aiuto della definizione di valore assoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

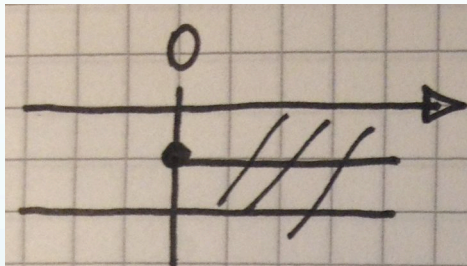
il numeratore diventa:

$$N \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - x + 6x^2 + 3 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ -x - x + 6x^2 + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Risolviamo:

1° sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 6x^2 + 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

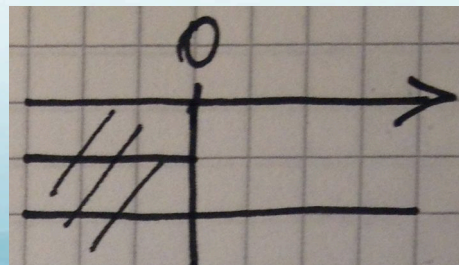


soluzione

$$x \geq 0 \xrightarrow{\text{oppure}} [0; +\infty[$$

2° sistema

$$\begin{cases} x < 0 \\ 6x^2 - 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

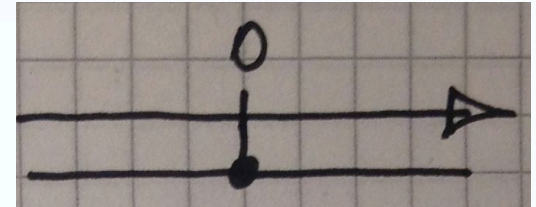


soluzione

$$x < 0 \xrightarrow{\text{oppure}}]-\infty; 0[$$

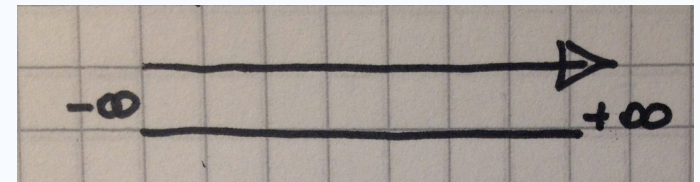
Pertanto:

$$N \geq 0 \xrightarrow{\text{soluzione}}]-\infty; 0[\cup [0; +\infty[=]-\infty; +\infty[$$

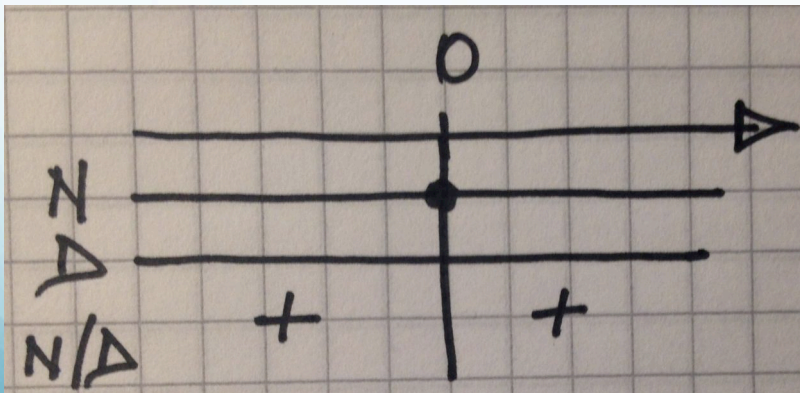


Per quanto riguarda il denominatore, abbiamo:

$$D > 0 \rightarrow 2x^2 + 1 > 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} \forall x \in \mathbb{R}$$



La soluzione della disequazione fratta è:



La disequazione fratta non è soddisfatta (non ammette soluzione) per nessun valore di x .

soluzione

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

Risolvere la seguente disequazione fratta con valore assoluto:

$$|x^2 - 1| > 2 - |4 - x| + x^2$$

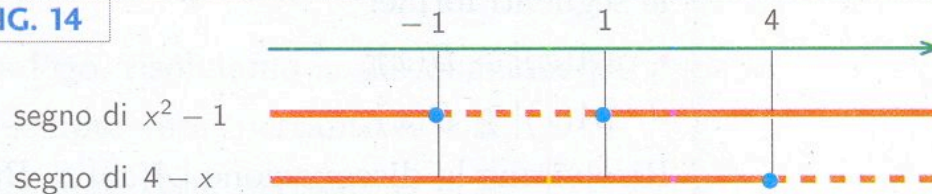
- a.** Esaminiamo il segno di ogni argomento risolvendo le disequazioni:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$$

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

- b.** Costruiamo lo schema dei segni degli argomenti:

FIG. 14



- c.** Per l'intervallo $x < -1 \vee 1 < x < 4$ risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x < -1 \vee 1 < x < 4 \\ x^2 - 1 > 2 - 4 + x + x^2 \end{cases} \quad \text{che ha per soluzione } x < -1.$$

- d.** Per l'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 1 > 2 - 4 + x + x^2 \end{cases} \quad \text{che ammette come soluzioni } -1 \leq x \leq 1.$$

- e.** Per l'intervallo $x \geq 4$ risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 1 > 2 + 4 - x + x^2 \end{cases} \quad \text{che ha per soluzione } x > 7.$$

L'unione delle soluzioni di tali sistemi è la soluzione della disequazione data; pertanto

$$\mathcal{S} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -1 \vee x > 7\}.$$